Kalkulator składki na świadczenie emerytalne wraz z dodatkowym ubezpieczeniem na życie

Autor

Zuzanna Kasprowicz
nr indeksu 345168
zk345168@students.mimuw.edu.pl

Wydział

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Opis projektu

Poniższy projekt to kalkulator, który pozwala w szybki sposób policzyć składkę NETTO na przyszłe świadczenie emerytalne wypłacane raz do roku. Składka płacona jest raz do roku. Aby poznać wysokość składki należy podać dane dotyczące PŁCI i WIEKU ubezpieczonego, OKRES wpłacania składek oraz oczekiwaną WYSOKOŚĆ emerytury. Kalkulator może uwzględnić także DODATKOWE ubezpieczenie na życie. Benefit ten jest wypłacany rodzinie w razie śmierci ubezpieczonego przed osiągnięciem wieku emerytalnego. Wysokość dodatkowego świadczenia to suma wpłaconych składek do momentu śmierci przemnożona przez współczynnik α (z przedziału od 0 do 1).

Teoria i wzory :

Naszym zadaniem jest znalezienie wysokości składki P, płaconej raz do roku przez okres n lat, na świadczenie emerytalne w wysokości E, dla osoby określonej płci w wieku x. W tym celu wprowadzimy kilka definicji i wzorów pomocnych w rozwiązaniu problemu.

1. Elementy teorii oprocentowania

- Efektywna stopa oprocentowania i
Jeśli dziś założę lokatę bankową w wysokości k_0, to po roku otrzymam $k_1 = k_0(1+i)$.

- Czynnik dyskontujący $v = \frac{1}{1+i}$

2. Elementy modelu demograficznego

a) Podstawowe oznaczenia i związki

- ${}_t p_x$ prawdopodobieństwo, że noworodek dożyje wieku $x+t$ pod warunkiem, że przeżył x lat
- ${}_t q_x$ prawdopodobieństwo, że noworodek umrze przed osiągnięciem wieku $x+t$ pod warunkiem, że przeżyje x lat

Oczywiście zachodzi równość: ${}_t p_x + {}_t q_x = 1$.

Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego mamy, że ${}_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}$, gdzie $s(x)$ prawdopodobieństwo, że noworodek przeżyje x lat.

b) Tablice trwania życia

Aktualne tablice trwania życia w Polsce można znaleźć na stronie: http://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/ludnosc/trwanie-zycia.
Informacje, które znajdują się w tablicach, są niezbędne podczas obliczania składki:

- l_x przeciętna liczba osób dożywających wieku x spośród początkowej liczby $l_0 = 100\,000$ noworodków.

Zauważmy, że $s(x) = \frac{l_x}{l_0}$.

-d_x przeciętna ilość zgonów w przedziale wieku od x do $x+1$.

3. Renty życiowe

a) Renta życiowa czasowa

Renta życiowa n letnia polega na dokonywaniu wpłaty 1 na początku każdego roku przez kolejnych n lat. Osoba x letnia dokonuje pierwszej wpłaty natychmiast, a ostatniej (EWENTUALNIE - istnieje możliwość przedwczesnej śmierci) w wieku $x+n-1$. Wzór na rentę życiową czasową to:

$$\ddot{a}_{x:n} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \;\; {}_k p_x .$$

b) Renta życiowa bezterminowa odroczona

Przykładem takiej renty jest emerytura. Aktywny zawodowo x latek otrzymuje obietnicę regularnych corocznych świadczeń w wysokości 1, które będą mu wypłacane począwszy od wieku $x+n$ aż do końca życia (może się zdarzyć, że obecna wartość przyszłych świadczeń emerytalnych wyniesie 0 - gdy pracownik nie dożyje wieku $x+n$). Wzór na wartość oczekiwaną obecnej wartości renty życiowej bezterminowej odroczonej o n lat to:

$${}_{n|}\ddot{a}_x = \sum_{k=n}^{\infty} v^k \;\; {}_k p_x .$$

4. Polisa terminowa ze świadczeniem ROSNĄCYM wypłacanym na koniec roku śmierci

Jeśli ważność ubezpieczenia wynosi n lat to w przypadku śmierci w pierwszym roku ważności polisy, świadczenie wyniesie 1, jeśli śmierć nastąpi w k-tym roku po zawarciu umowy ($k < n$) to świadczenie wyniesie $k+1$. Wreszcie jeśli śmierć nastąpi w okresie $n-1$ do n po zawarciu umowy to świadczenie wyniesie n.

Wzór na jednorazową składkę netto na ubezpieczenie terminowe na n lat ze świadczeniem rosnącym to:

$$(IA)^{1}_{x:n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1+k\right) v^{k}\, {}_{k}p_{x}\, q_{x+k}.$$

5. Actuarial Equivalence Principle

Metoda policzenia składki na przyszłe świadczenie emerytalne plus dodatkowe ubezpieczenie życiowe opiera się na aktuarialnej zasadzie równoważności. To znaczy:

WARTOŚĆ OCZEKIWANIA OBECNEJ WARTOŚCI SKŁADEK = WARTOŚĆ OCZEKIWANA OBECNEJ WARTOŚCI KORZYŚCI

Przypomnijmy, że chcemy otrzymywać emeryturę w wysokości E. Składki w wysokości P płacone co roku przez okres n lat. Ubezpieczenie dla x latka. Zatem składki płacone będą przez następne n lat, a nasze benefity to odroczona o n lat emerytura w wysokości E na rok oraz wypłacenie ewentualnego ubezpieczenia w razie przedwczesnej śmierci. Ubezpieczenie to wypłaca sumę wpłaconych składek do czasu śmierci przemnożoną przez współczynnik $\alpha \in [0,1]$ (zauważmy, że gdy $\alpha = 0$ to rozważamy policzenie składki tylko na świadczenie emerytalne). Mamy zatem:

$$P \cdot \ddot{a}_{x:n} = E \cdot {}_{n|}\ddot{a}_{x} + (IA)^{1}_{x:n} \cdot \alpha \cdot P.$$

Stąd dostajemy wzór na składkę:

$$P = E \frac{{}_{n|}\ddot{a}_{x}}{\ddot{a}_{x:n} - (IA)^{I}_{x:n} \cdot \alpha}$$

6. Funkcje komutacyjne

Aby ułatwić obliczenia wszystkich wartości aktuarialnych skorzystamy z funkcji komutacyjnych i tablic trwania życia.

$D_x := v^x\, l_x$

$C_x := v^{x+1}\, d_x$

$M_x := \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$

$R_x := \sum_{k=0}^{\infty} M_{x+k}$

$N_x := \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$

$$\ddot{a}_{x:n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$_{n|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

$$(IA)^1_{x:n} = \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x}$$

Program :

In[1]:=

```
(*Zmienne modelujące sytuację:
                        a) plec - określa płeć ubezpieczonego.
                        b) wiek - określa wiek ubezpieczonego.
                        c) okres -
         długość płacenia składek oraz termin ubezpieczenia.
                        d) tso - techniczna stopa oprocentowania.
                        e) alpha -
    współczynnik z przedziału [0,1] mówiący o beneficie wypłacanym
     rodzinie w przypadku wcześniejszej śmierci ubezpieczonego.
                        f) em - wysokość emerytury,
jaką chciałby otrzymywać ubezpieczony.

*)
Manipulate[
 (* 1. Deklaracja tablic lx i dx oddzielnie dla mężczyzn i kobiet*)

(* lxm =Import["C:\\Users\\Zuza\\Desktop\\tablice.xls",
    {"Data",26,Table[i,{i,5,105}],3}]; *)
 (* liczba dożywających mężczyzn w wieku x spośród l₀=100000 noworodków*)
lxm = {100000.`, 99560.`, 99528.`, 99508.`, 99494.`, 99484.`, 99475.`,
   99466.`, 99458.`, 99449.`, 99439.`, 99427.`, 99414.`, 99398.`,
   99381.`, 99359.`, 99332.`, 99295.`, 99242.`, 99174.`, 99091.`,
   98999.`, 98905.`, 98812.`, 98718.`, 98623.`, 98525.`, 98423.`, 98319.`,
   98213.`, 98104.`, 97989.`, 97867.`, 97738.`, 97601.`, 97453.`, 97293.`,
   97121.`, 96935.`, 96733.`, 96512.`, 96271.`, 96005.`, 95712.`, 95389.`,
   95033.`, 94639.`, 94204.`, 93725.`, 93197.`, 92618.`, 91982.`, 91286.`,
   90526.`, 89697.`, 88796.`, 87818.`, 86760.`, 85619.`, 84391.`, 83075.`,
   81668.`, 80169.`, 78580.`, 76901.`, 75134.`, 73284.`, 71352.`, 69343.`,
   67259.`, 65102.`, 62872.`, 60570.`, 58193.`, 55738.`, 53202.`, 50583.`,
   47880.`, 45097.`, 42239.`, 39320.`, 36356.`, 33370.`, 30386.`, 27435.`,
   24545.`, 21747.`, 19067.`, 16532.`, 14162.`, 11975.`, 9986.`, 8200.`,
   6624.`, 5257.`, 4093.`, 3124.`, 2333.`, 1702.`, 1212.`, 840.`};
(* dxm = Import["C:\\Users\\Zuza\\Desktop\\tablice.xls",
    {"Data",26,Table[i,{i,5,105}],5}]; *)
 (*liczba zgonów wśród mężczyzn w wieku x *)
dxm = {440.`, 31.`, 21.`, 13.`, 10.`, 9.`, 9.`, 9.`, 9.`, 10.`, 11.`, 13.`,
   15.`, 18.`, 21.`, 27.`, 38.`, 52.`, 69.`, 83.`, 92.`, 94.`, 94.`, 93.`,
   95.`, 98.`, 102.`, 104.`, 106.`, 109.`, 115.`, 121.`, 129.`, 138.`, 148.`,
   159.`, 172.`, 186.`, 202.`, 221.`, 242.`, 266.`, 293.`, 323.`, 357.`,
   394.`, 435.`, 479.`, 527.`, 580.`, 636.`, 696.`, 760.`, 829.`, 901.`,
   978.`, 1058.`, 1141.`, 1228.`, 1317.`, 1407.`, 1498.`, 1589.`, 1679.`,
   1766.`, 1851.`, 1932.`, 2009.`, 2084.`, 2157.`, 2229.`, 2302.`, 2377.`,
   2455.`, 2536.`, 2619.`, 2703.`, 2784.`, 2857.`, 2919.`, 2964.`, 2987.`,
   2983.`, 2951.`, 2890.`, 2798.`, 2680.`, 2535.`, 2370.`, 2187.`, 1989.`,
   1786.`, 1576.`, 1367.`, 1163.`, 970.`, 791.`, 631.`, 490.`, 371.`, 274.`};
```

```
(* lxk = Import["C:\\Users\\Zuza\\Desktop\\tablice.xls",
    {"Data",26,Table[i,{i,106,206}],3}] ; *)
 (* liczba dożywających kobiet *)
 lxk = {100000.`, 99638.`, 99611.`, 99594.`, 99584.`, 99577.`, 99570.`,
   99562.`, 99554.`, 99545.`, 99536.`, 99527.`, 99517.`, 99506.`,
   99493.`, 99478.`, 99461.`, 99442.`, 99422.`, 99400.`, 99376.`,
   99352.`, 99328.`, 99305.`, 99282.`, 99261.`, 99240.`, 99219.`, 99197.`,
   99173.`, 99146.`, 99117.`, 99084.`, 99049.`, 99010.`, 98967.`, 98919.`,
   98866.`, 98807.`, 98742.`, 98668.`, 98585.`, 98493.`, 98389.`, 98272.`,
   98141.`, 97994.`, 97830.`, 97647.`, 97443.`, 97216.`, 96965.`, 96688.`,
   96381.`, 96041.`, 95667.`, 95254.`, 94799.`, 94299.`, 93752.`, 93153.`,
   92501.`, 91793.`, 91028.`, 90202.`, 89316.`, 88366.`, 87351.`, 86268.`,
   85114.`, 83885.`, 82574.`, 81172.`, 79667.`, 78044.`, 76285.`, 74369.`,
   72274.`, 69979.`, 67465.`, 64720.`, 61735.`, 58514.`, 55068.`, 51420.`,
   47603.`, 43656.`, 39628.`, 35572.`, 31546.`, 27607.`, 23816.`, 20222.`,
   16879.`, 13828.`, 11104.`, 8725.`, 6698.`, 5014.`, 3654.`, 2587.`};

(* dxk=Import["C:\\Users\\Zuza\\Desktop\\tablice.xls",
    {"Data",26,Table[i,{i,106,206}],5}]; *)
 (* liczba zgonów kobiet w wieku x *)
 dxk = {362.`, 27.`, 17.`, 10.`, 7.`, 7.`, 8.`, 9.`, 9.`, 9.`, 9.`, 9.`, 11.`, 13.`,
   15.`, 17.`, 19.`, 20.`, 22.`, 23.`, 24.`, 24.`, 23.`, 22.`, 21.`, 21.`, 21.`,
   22.`, 24.`, 27.`, 29.`, 32.`, 35.`, 39.`, 43.`, 48.`, 53.`, 59.`, 66.`, 74.`,
   83.`, 93.`, 104.`, 117.`, 131.`, 147.`, 164.`, 183.`, 204.`, 226.`, 251.`,
   278.`, 307.`, 339.`, 375.`, 413.`, 455.`, 500.`, 548.`, 599.`, 652.`, 708.`,
   766.`, 825.`, 887.`, 950.`, 1015.`, 1083.`, 1154.`, 1229.`, 1311.`, 1402.`,
   1505.`, 1623.`, 1759.`, 1916.`, 2095.`, 2295.`, 2513.`, 2746.`, 2985.`, 3221.`,
   3446.`, 3648.`, 3818.`, 3947.`, 4028.`, 4055.`, 4026.`, 3939.`, 3792.`, 3593.`,
   3344.`, 3050.`, 2724.`, 2379.`, 2027.`, 1684.`, 1360.`, 1067.`, 811.`};

(* CZY Z UBEZPIECZENIEM *)
 If[ubezpieczenie == False, alpha = 0];
 (*WYBÓR PŁCI*)
If[plec === "Kobieta", {lx = lxk, dx = dxk}, {lx = lxm, dx = dxm}];
 v = 1 / (1 + tso); (*tso - techniczna stopa oprocentowania*)

 (* 2. Deklaracja funkcji komutacyjnych *)

 Dx = Table[v^x lx[[x + 1]], {x, 0, Length[lx] - 1}];
 (*Dx traktujemy jak listę!!!!!!*)
 Cx = Table[v^(x + 1) (lx[[x + 1]] - lx[[x + 2]]), {x, 0, Length[lx] - 2}];
 Nx = Table[Sum[Dx[[k]], {k, x, Length[Dx]}], {x, 1, Length[Dx]}];
 Mx = Table[Sum[Cx[[k]], {k, x, Length[Cx]}], {x, 1, Length[Cx]}];
 Rx = Table[Sum[Mx[[k]], {k, x, Length[Mx]}], {x, 1, Length[Mx]}];

 (* 3. Deklaracja wartości aktuarialnych *)

 axn[x_, n_] := (Nx[[x + 1]] - Nx[[x + 1 + n]]) / Dx[[x + 1]];
 (* n (okres) letnia renta dla x (wiek) latka*)
 nax[x_, n_] := Nx[[x + 1 + n]] / Dx[[x + 1]];
 (*renta dla x (wiek) latka odroczona o n (okres) lat*)
IAxn[x_, n_] := (Rx[[x + 1]] - Rx[[x + 1 + n]] - n * Mx[[x + 1 + n]]) / (Dx[[x + 1]]);
 (*Polisa terminowa ze świadczeniem
  rosnącym wypłacanym na koniec roku śmierci*)

 (* 4. Wyliczenie składki: *)

 skladka = em * nax[wiek, okres] / (axn[wiek, okres] - alpha IAxn[wiek, okres]);
```

```
(* 5. Wygląd demonstracji: *)
Grid[{ {Column[{
    Style["Kalkulator składki na świadczenie emerytalne:", 30, Black, Bold],
    Style["  ", 20],
    Style["Poniższy kalkulator pozwala w szybki sposób policzyć składkę na
       przyszłe świadczenie emerytalne wypłacane raz do roku.
       Wystarczy podać dane dotyczące płci i wieku ubezpieczonego
       (w przedziale od 18 do 70 lat), okres wpłacania
       składek (maksymalnie 99 minus wiek ubezpieczonego)-
       uiszczanych raz do roku, oraz oczekiwaną wysokość
       emerytury (maksymalnie 100000 rocznie). Kalkulator może
       uwzględnić także dodatkowe ubezpieczenie. Benefit ten
       jest wypłacany rodzinie w razie śmierci ubezpieczonego
       przed osiągnięciem wieku emerytalnego. Wysokość
       dodatkowego świadczenia to suma dotychczas wpłaconych
       składek przemnożona przez współczynnik α (z przedziału
       od 0 do 1). Należy jednak pamiętać, że składka rośnie
       wraz ze wzrostem poziomu α. ", TextAlignment -> Center],
    Style[" ", 35],
    Text@Row[{Style["Dane wprowadzone przez ubezpieczonego:", 18]}],
    Text@Row[{" "}],
    Text@Row[{"Płeć: ", plec}],
    Text@Row[{"Wiek ubezpieczonego: ", wiek}],
    Text@Row[{"Okres ubezpieczenia: ", AccountingForm[okres]}],
    Text@Row[{ "Oczekiwana wysokość rocznego świadczenia emerytalnego: ",
       AccountingForm[em], " zł"}],
    Text@Row[{"Techniczna stopa oprocentowania: ", tso * 100 , "%"}],
    Text@Row[{"Z dodatkowym ubezpieczeniem: ",
       If[ubezpieczenie == False, "nie", "tak"]}],
    Text@Row[{"Współczynnik α : ", alpha * 100 "%"}],
    Text@Row[{" "}],
    Text@
     Row[{Style["Dla powyższych danych, wysokość składki, płaconej raz na
          rok, wynosi: ", 18], Style[Round[
         skladka, 0.01], 30, Bold, Red], Style[" zł", 30, Bold, Red]}]

   }]},
  {Style[" ", 45]},


  {Style["Dlaczego taka składka?  ", 18, FontColor → Red, FontWeight → Bold]},
  {Style["Wysokość składki związana jest z wieloma czynnikami: z wysokością
     oczekiwanego świadczenia emerytalnego, z okresem płacenia
     składek, wysokością dodatkowego ubezpieczenia. Zauważmy,
     że wysokość składki jest też ściśle związana z płcią
     oraz wiekiem ubezpieczonego. Zjawisko to tłumaczy wykres
     przedstawiony poniżej:", TextAlignment → Center]},
  {Style["  ", 45]},

  tpx[t_] := If[t == 0, 0, lx[[wiek + 1 + t]] / lx[[wiek + 1]]];
  (*prawdopodobieństwo dożycia kolejnych lat przez osobę w wieku 'wiek'*)
  lista = {Table[0, wiek], Table[i, {i, 1, 100 - wiek}]} // Flatten;
  (*lista deklarowana dla ułatwienia rysowania -
   pierwsze elementy (taka ilość jaka wiek) to 0,
  kolejne elementy to liczby całkowite od 1 do 100-
   wiek (będziemy liczyć prawdopodobieństwo,
    że osoba w wieku 'wiek' przeżyje następne t lat*)
```

```
  {Show[ListLinePlot[tpx /@ lista, ImageSize → {500, 320},
     PlotRange → {{1, 100}, {0, 1}}, Frame → True, FrameLabel →
      {Style["Wiek", 15], Style["Prawdopodobieństwo przeżycia", 15]},
     PlotStyle → Red, Filling → Axis, GridLines → Automatic,
     PlotLegends → {"Dalsze trwanie życia osoby w danym wieku "}],
    ListLinePlot[lx[[Range[100] + 1]] / lx[[1]],
     ImageSize → {500, 320}, PlotStyle → Blue, Filling → Axis,
     PlotLegends → {"Rozkład trwania życia noworodka"}],
    PlotLabel → Style["Rozkład trwania życia", 20]]}
   (*pierwszy wykred dla osoby w danym wieku,
  drugi wykres dla noworodka*)

 }],

(* 6. Sterowanie kalkulatorem *)

" ",
Delimiter,
" ",
Delimiter,

Style["Wprowadź dane:", 18, FontColor → Red, FontWeight → Bold],
" ",
Style["Pola obowiązkowe:", 13, Bold],
{{plec, "Kobieta", "Płeć:"}, {"Kobieta", "Mężczyzna"}},
{{wiek, 35, "Wiek:"}, 18, 70, 1, ImageSize → Small, Appearance → "Labeled"},
{{okres, 30, "Okres ubezpieczenia: "}, 1,
 99 - wiek, 1, ImageSize → Small, Appearance → "Labeled"},
{{em, 12 000, "Oczekiwana wysokość świadczenia emerytalnego: "},
 0, 100 000, 500, ImageSize → Small, Appearance → "Labeled"},
{{tso, 0.03, "Techniczna stopa oprocentowania: "}, 0, 0.25,
 0.005, ImageSize → Small, Appearance → "Labeled"},
Delimiter,
Style["Pola opcjonalne:", 13, Bold],
{{ubezpieczenie, False, "Dodatkowe ubezpieczenie:"}, {True, False}},
{{alpha, 0, "Współczynnik α"}, 0, 1,
 0.001, ImageSize → Small, Appearance → "Labeled"},
TrackedSymbols → True, ControlPlacement → Left, SaveDefinitions → True
]
```

Wprowadź dane:

Pola obowiązkowe:

Płeć: Kobieta | Mężczyzna

Wiek: 35

Okres ubezpieczenia: 30

Oczekiwana wysokość świadczenia emerytalnego: 12 000

Techniczna stopa oprocentowania: 0.03

Pola opcjonalne:

Dodatkowe ubezpieczenie:

Współczynnik α: 0

Out[1]=

Kalkulator
na świad

```
Poniższy kalkulator po
emerytalne wypłaca
ubezpieczonego (w prz
99 minus wiek ubezpi
emerytury (maksymalni
ubezpieczenie. Benef
przed osiągnięciem
dotychczas wpłacony
0 do 1). Należy jed
```

Dane wprowadzone prz

Płeć: Kobieta

Wiek ubezpieczonego: 35

Okres ubezpieczenia: 30

Oczekiwana wysokość rocznego

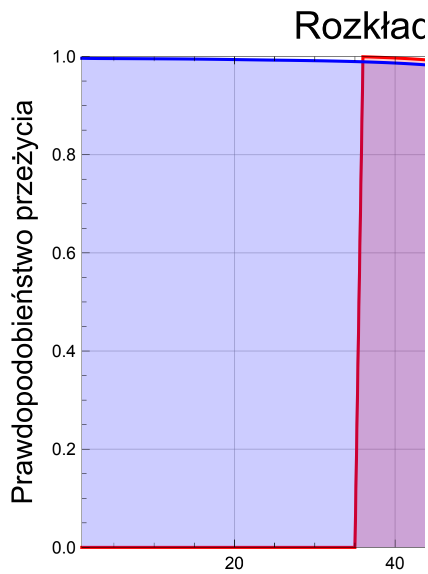
Techniczna stopa oprocentowani

Z dodatkowym ubezpieczeniem:

Współczynnik α : 0

Dla powyższych danych

```
Wysokość składki zw
świadczenia emeryt
ubezpieczenia. Zau
oraz wiekiem ubezpi
```



In[2]:= **Bibliografia**

1. Ubezpieczenia na życie - Mariusz Skałba (wyd.II - 2002 : Wydawnictwa Naukowo - Techniczne, ISBN 8 320 427 096)
2. http : // stat.gov.pl / obszary - tematyczne / ludnosc / trwanie - zycia
3. http : // demonstrations.wolfram.com / LifeExpectancyInTheUSPopulation
4. http : // demonstrations.wolfram.com / NetAndGrossReserveOfLifeInsurance
5. http : // reference.wolfram.com / language / tutorial / IntroductionToManipulate.html

Out[2]= Bibliografia